

Exercices – Séquence n° 7 – PROBABILITÉS (I) :

succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Contenus	- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités des composantes. Représentation par un produit cartésien, par un arbre. - Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. - Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes. - Loi binomiale $B(n; p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux. - Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
Capacités	- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale. - Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès. - Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$ en s'aidant au besoin d'un algorithme. - Chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$. - Exemples d'algorithmes : planche de Galton, problème de surréservation (détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq \alpha$), simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Exercice 1 [Ra-Re] DON DU SANG**

Le sang humain est classé en quatre groupes A, B, AB et O qui sont répartis dans la population de la façon suivante :

A : 40 % B : 10 % AB : 5 % O : 45 %

Trois personnes, qui ne se connaissent pas, entrent l'une après l'autre au « Don du sang ». On note A l'évènement : « La personne est du groupe sanguin A ».

Déterminer, en expliquant la démarche, la probabilité que : « Deux des trois personnes exactement soient du groupe A ».

**Exercice 2 [Mo-Ra]**

Selon la Sécurité routière, en 2023, environ 1,8 % des véhicules roulaient sans assurance. Depuis, de nouveaux radars capables de détecter le défaut d'assurance ont été mis en service. Cinq véhicules passent devant l'un de ces radars qui interroge alors les fichiers d'assurance. X est la variable aléatoire égale au nombre de véhicules présentant un défaut d'assurance.



- Justifier que X suit une loi binomiale en précisant les paramètres.
- Dans ce schéma de Bernoulli, combien d'issues réalisent deux succès ?
- Quelle est la probabilité, arrondie à 0,001 près, qu'exactement un des cinq véhicules contrôlés présente un défaut d'assurance ?
- Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \geq 2\}$ puis interpréter le résultat.
- Calculer $E(X)$ puis interpréter le résultat.

Exercice 3 [Mo-Ra]

Sur un site de vente en ligne, environ 5% des commandes font l'objet d'un retour.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi binomiale.

Si oui, préciser ses paramètres.

- 1) On examine des ventes dans la base de données jusqu'à ce qu'on trouve un retour. On note alors X le nombre de ventes examinées.
- 2) On examine 100 ventes dans la base de données et on note X le nombre de retours.

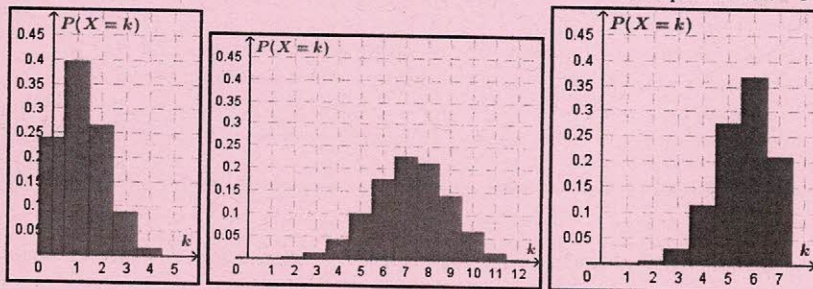
Exercice 4 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans un chenil, on vaccine 15 chiots de manière indépendante. Lors des vaccinations précédentes, 20 % des chiots ont présenté une forte réaction au vaccin. Soit X la variable aléatoire qui, à un groupe de 15 chiots, associe le nombre de chiots ayant eu une forte réaction suite à cette vaccination.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.
- 2) Calculer la probabilité des événements $\{X = 1\}$ et $\{X \geq 2\}$. Comment interpréter les résultats?

Exercice 5 [Re]

On a représenté graphiquement trois lois binomiales. Parmi elles, la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,25$.

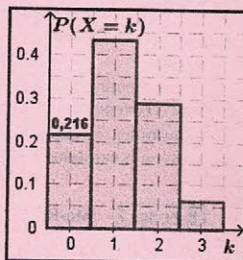


- 1) Quel graphique correspond à la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,25$?
- 2) Pour les deux autres graphiques, donner la valeur du paramètre n et donner un encadrement de p .

Exercice 6 [Re-Ra-Co]

On a représenté ci-contre une loi binomiale de paramètres n et p .

Déterminer la valeur de chacun de ces paramètres.

**Exercice 7** [Mo-Ra-Ca-Co]

À l'occasion d'un festival de cinéma à Tarantville, on interroge cinq personnes à la fin de la projection d'un film. Le nombre de personnes assistant à cette projection est suffisant grand pour que l'on puisse assimiler ce sondage à des « tirages successifs avec remise ». On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de personnes interrogées, associe le nombre de personnes ayant aimé le film.

- 1) On a constaté dans d'autres villes de la région que 40 % des personnes interrogées ont aimé le film.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.
 - b. On appelle A l'événement : « parmi les cinq personnes interrogées, trois ont aimé le film ». Calculer la probabilité de l'événement A .
- 2) Il s'avère que la population ayant assisté à cette projection est très différente de celle des autres villes car cette projection a eu lieu dans le cadre d'un festival. On appelle x la probabilité pour une personne d'aimer ce film.

- Exprimer, en fonction de x , la probabilité de l'évènement A.
- Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = x^3(1-x)^2$
- Pour quelle valeur de x , la probabilité de l'évènement A est-elle maximale ?

Exercice 8 [Ch-Mo-Ra-Co]

On tire successivement et avec remise n cartes ($n \in \mathbb{N}^*$) dans un jeu de 32 cartes et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de « Roi de cœur » tirés.

- Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier.
- Compléter les lignes 6, 7 et 8 de la fonction Python `simulroidecoeur(n)` afin qu'elle simule la variable aléatoire X .
- Aider Léo à répondre à la question suivante : « Combien doit-on effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins un roi de cœur soit supérieure ou égale à 0,95 ? ». Expliquer.

```

1 from math import *
2 from random import *
3 def simulroidecoeur(n):
4     X=0
5     for i in range(n):
6         if
7
8     return

```

Exercice 9 [Mo]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Écrire, en langage Python, une fonction nommée `Param_binom(n,p)` de paramètres n et p qui renvoie la LISTE composée, dans cet ordre, de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 10 [Mo-Ra-Ca-Co]

Une roseraie livre des fleuristes par lots de 100 roses. Afin de fidéliser ses clients, elle rembourse un lot lorsqu'il contient strictement plus de 5 roses fanées. Une étude a montré que 4 % des roses livrées sont fanées. On choisit un lot au hasard et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de roses fanées de ce lot.

- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
- A l'aide du menu « Probabilités » de la calculatrice, déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que :
 - 8 roses exactement soient fanées.
 - 4 roses ou moins soient fanées.
 - le lot soit remboursé au fleuriste.
- Le chef des ventes de la roseraie souhaite que le nombre de lots remboursés n'excède pas 1% des lots livrés. Pour cela, il augmente le nombre minimum k de roses fanées à partir duquel le lot est remboursé.

A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de cet entier k .

Indications : Menu Fonctions `f(x)=binomcdf(x,100,0.04)` puis tableau pour $0 \leq x \leq 100$.

Exercice 11 [Mo-Ra-Ca-Co]

Les résultats seront arrondis, au besoin, à 10^{-4} près.

Les trois pales d'une éolienne doivent être contrôlées périodiquement.

On a établi quatre classes de gravité de dommages :

- Classe 4 : dégâts légers qui ne nécessitent ni intervention ni arrêt de l'éolienne.

Dans les trois autres cas, il y a intervention et arrêt de l'éolienne.

- Classe 3 : la pale est réparée sur place
- Classe 2 : la pale doit être démontée
- Classe 1 : les trois pales doivent être changées.

Dans 98,2 % des cas, le technicien ne diagnostique aucun souci sur la pale ou bien seulement un dommage de classe 4. Dans tous les autres cas, on dira que la pale est défaillante.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque inspection de 70 éoliennes, associe le nombre de pales nécessitant une intervention.



- Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que, lors d'une inspection :
 - aucune pale ne nécessite d'intervention.
 - au plus deux pales soient défectueuses.
- Sachant qu'il y a au moins deux pales défectueuses, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus cinq ?
- En moyenne, combien de pales nécessitent une intervention ?

Exercice 12 [Mo-Re-Ra-Ca-Co]

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

- On prélève dans cette production, successivement et avec remise onze stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les onze stylos prélevés.
 - Déterminer la loi de probabilité de X . Justifier la réponse.
 - Calculer la probabilité des événements suivants :
 - « il n'y a aucun stylo avec un défaut »
 - « il y a au moins un stylo avec un défaut »
 - « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
 - Calculer l'espérance de X puis interpréter le résultat.
- En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».
 - Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.
 - Montrer que la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est égale à 0,92.
 - Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.
- Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, onze stylos parmi les stylos acceptés.
 - Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de onze stylos.
 - Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1).
Quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 13 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co] Le problème du Chevalier de Méré

Quel est l'événement le plus probable entre :

A : « Obtenir au moins un 6 en lançant quatre fois un dé à 6 faces non truqué »

B : « Obtenir au moins un double 6 en lançant vingt-quatre fois deux dés non truqués à six faces »

Exercice 14 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis à 10^{-4} près.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans (Source : TNS-Sofres).

Partie A : On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'événement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'événement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

- Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- Calculer la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans utilisant les transports en commun.

- 3) D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas les transports en commun est 0,0556.
- 4) En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B : Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

- 1) Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
- 2) Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
- 3) Le recenseur indique qu'il y a plus de 95% de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.
- 4) Au moins 3 personnes ont déjà répondu en disant qu'ils utilisaient régulièrement les transports en commun. Déterminer la probabilité qu'au plus 10 personnes utilisent régulièrement les transports en commun.

Exercice 15 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification. Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est 0,6.
- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés. Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.
Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n°1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80% des cas.

Condition n°2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Exercice 16 [Re-Mo-Ra-Ca-Co]

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique et on note S l'évènement : « le voyageur fait sonner le portique » et M l'évènement : « le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique et on admet que si :

- un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne vaut 0,98
- un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

Partie A

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- 2) Déterminer la probabilité de l'évènement S .
- 3) En déduire la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un voyageur porte un objet métallique sur lui sachant qu'il a fait sonner le portique.

Partie B

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192 et on note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe. **Les résultats seront arrondis, au besoin, à 10^{-3} près.**

- Donner, sans justifier, la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.
- Calculer la probabilité qu'au moins une personne de ce groupe fasse sonner le portique.
- A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité qu'au maximum cinq personnes de ce groupe fassent sonner le portique.
- A la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel k tel que : $P(X \leq k) \geq 0,9$. Interpréter le résultat.

Exercice 17 [Mo-Re-Ra-Ca-Co]**Partie A : Production du thé**

Un grossiste achète 80 % de ses boîtes de thé vert chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B. 10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent également des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

A : « la boîte provient du fournisseur A » ; B : « la boîte provient du fournisseur B »

T : « la boîte présente des traces de pesticides ».

- Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré de probabilités.
- Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides vaut 0,88.

**Partie B : Publicité sur le thé**

A des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ». Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation ; il prélève alors 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste.

On note X la variable aléatoire qui associe, à ce prélèvement aléatoire de 50 boîtes, le nombre de boîte sans trace de pesticides.

- Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier.
- Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-4} près, que les 50 boîtes soient sans trace de pesticides.
- A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $P(X \leq a) > 0,025$.
- A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel b tel que : $P(X \leq b) \geq 0,975$.
- En déduire un intervalle I tel que : $P(X \in I) \geq 0,95$.
- Sur les 50 boîtes prélevées au hasard dans le stock du grossiste, 12 présentent des traces de pesticides. Que peut en conclure l'inspecteur ?

Exercice 18 [Mo-Ra-Ca-Co] Surréservation aérienne**Partie A – BUS ou PAS ?**

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport. S'il prend le bus de 8h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol. Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport. Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8. S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; la probabilité qu'il soit à l'heure à l'aéroport est alors égale à 0,5. On notera :

B l'événement « Julien réussit à prendre son bus » et V l'événement « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

- Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- Calculer $P(V)$.
- Julien est arrivé à l'heure à l'aéroport pour son vol. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le bus pour s'y rendre ? Justifier.

Partie B – SURRÉSERVATION ou PAS ?

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé ; on appelle cette pratique le surbooking. Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

- 4) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 5) En moyenne, combien de passagers vont se présenter à l'embarquement ?
- 6) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que 201 passagers se présentent à l'embarquement.
- 7) Le programme ci-contre, écrit en langage Python, utilise la fonction `binomiale(i,n,p)` créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p .


```
1 from math import *
2 def proba(k):
3     p=0
4     for i in range(0,k+1):
5         p=p+binomiale(i,206,0.95)
6     return p
```

 - a. À l'aide de la calculatrice, déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit `proba(200)` dans une console d'exécution Python puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - b. En déduire, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 201 passagers se présentent à l'embarquement.
- 8) À la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$. Interpréter le résultat.
- 9) La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros. Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé. On appelle :
 - Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;
 - C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = k)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

- a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.
- b. Calculer $E(Y)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- c. Justifier que $C = 51\,500 - 850Y$.
- d. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
- e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
- f. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking. Commenter.

Exercice 19 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeur. On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongeur, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

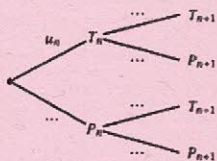
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les événements :

- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n -ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeur lors de son n -ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = p(T_n)$ où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n .

- 1) Déterminer $p(T_1)$ et $p(P_1)$, puis les probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$ et $p_{P_1}(T_2)$.



- 2) Démontrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.
- 3) Recopier et compléter l'arbre ci-dessus modélisant la situation pour tout entier naturel $n \geq 1$.
- 4) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
- 5) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ dont on précisera le premier terme.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}$.
 - c. Conclure quant à la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

Pour réviser
EXERCICES DU MANUEL :

- Exercices 32, 35, 49, 54, 72 et 115 pages 382 à 392.

Exercice 20 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co] POLYNÉSIE 2019

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelée un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01 et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

- 1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
- 2) Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
- 3) Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet. On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité. Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur est 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité et on considère les événements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
 - E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
 - D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
 - B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».
- 4) Déterminer la probabilité que les huit bits de l'octet aient été transmis avec au moins deux erreurs sachant que le bit de parité a été transmis sans erreur.

Pour aller plus loin

Exercice 21 [Mo-Ra-Ca-Co]**Partie A** Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$.
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par G_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie ».On note p_n la probabilité de l'évènement G_n . On a donc $p_1 = 0,25$.

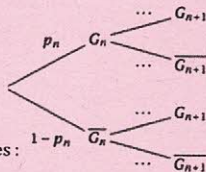
1) Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :

3) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

4) Grâce à un tableur, on obtient ainsi les premières valeurs de p_n , éventuellement approchées :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999



- Est-il vrai d'affirmer que la suite (p_n) n'est pas monotone ? Justifier.
- Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (p_n) ?

5) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par : $u_n = p_n - \frac{2}{5}$

- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
- En déduire la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

- Écrire un algorithme en langage naturel qui donne la plus petite valeur entière de n pour laquelle : $|p_n - 0,4| < 10^{-7}$.
- À l'aide de la calculatrice, donner la valeur affichée.

Partie B Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. Les parties sont supposées indépendantes.La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

- Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
- Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, que le joueur gagne au moins une partie ?
- Déterminer l'espérance de X .
- Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
 - Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
 - Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-5} près, pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €.